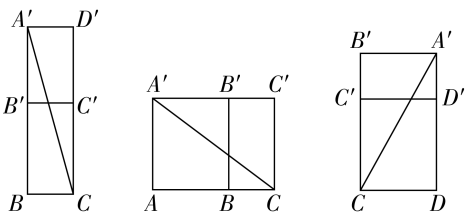
专题七　线段最值模型

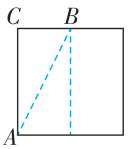
模型 24　平面展开——最短路径问题

1. C　【解析】如图(1)，$A'C=\sqrt{BC^2+A'B^2}=\sqrt{3^2+(5+6)^2}=\sqrt{130}$；如图(2)，$A'C=\sqrt{AA'^2+AC^2}=\sqrt{6^2+(5+3)^2}=10$；如图(3)，$A'C=\sqrt{CD^2+A'D^2}=\sqrt{5^2+(3+6)^2}=\sqrt{106}$. ∵ $10<\sqrt{106}<\sqrt{130}$，∴ 点 A' 爬到点 C 的最短爬行路程是 10. 故选 C.

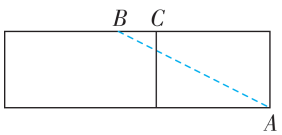


图(1)　图(2)　图(3)

2. A　【解析】如图为圆柱的侧面展开图. 根据题意得出蚂蚁沿圆柱侧面爬行的最短路程是指线段 AB 的长. 由题意得 $AC=12$ cm，$BC=9$ cm，由勾股定理得 $AB=\sqrt{12^2+9^2}=15$(cm)，所以蚂蚁沿圆柱侧面爬行的最短路程是 15 cm. 故选 A.

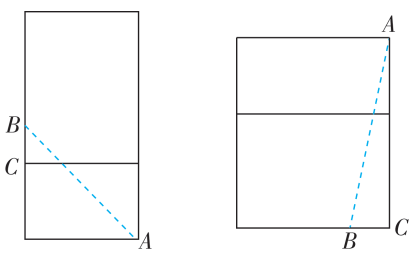


3. C　【解析】如图(1)，



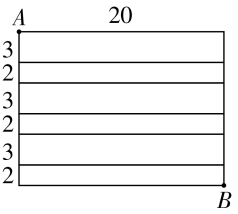
图(1)

根据勾股定理得 $AB=\sqrt{20^2+10^2}=10\sqrt{5}$(cm)；如图(2)，根据勾股定理得 $AB=\sqrt{15^2+15^2}=15\sqrt{2}$(cm)；如图(3)，根据勾股定理得 $AB=\sqrt{25^2+5^2}=5\sqrt{26}$(cm). ∵ $15\sqrt{2}<10\sqrt{5}<5\sqrt{26}$，∴ 蚂蚁爬行的最短路程是 $15\sqrt{2}$ cm. 故选 C.

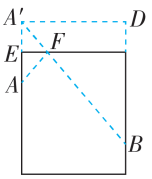


图(2)　图(3)

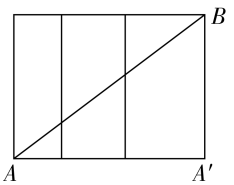
4. B　【解析】如图所示，台阶面的展开图为长方形，长为 20 dm，宽为 $(2+3)\times 3=15$(dm)，则蚂蚁沿着台阶面爬行到点 B 的最短路程是 $AB=\sqrt{20^2+15^2}=25$(dm). 故选 B.



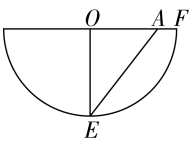
5. 13　【解析】如图为圆柱侧面的部分展开图，A' 与 A 关于 EF 对称. 由题意知 $A'D=5$ cm，$BD=12$ cm，由勾股定理得 $A'B=\sqrt{A'D^2+BD^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$(cm). 故壁虎捕捉蚊子需爬行的最短路程为 13 cm. 故答案为 13.



6. 15　【解析】如图为三棱柱的侧面展开图，$AA'=3+4+5=12$(cm)，$A'B=9$ cm，$\angle AA'B=90°$，∴ $AB=\sqrt{AA'^2+A'B^2}=\sqrt{12^2+9^2}=15$(cm)，故答案为 15.



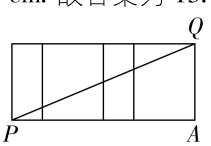
(第 6 题图)



(第 7 题图)

7. $2\sqrt{41}$ cm　【解析】圆锥的侧面展开图如图所示，设 $\angle EOF=n°$，则 $l_{\overset{\frown}{EF}}=\frac{1}{2}\times 10\pi=\frac{n\cdot\pi\cdot 10}{180}$，∴ $n=90$，即 $\angle EOF=90°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOE$ 中，$OA=8$ cm，$OE=10$ cm，根据勾股定理可得 $AE=\sqrt{OE^2+OA^2}=\sqrt{10^2+8^2}=2\sqrt{41}$(cm)，所以蚂蚁爬行的最短路径长为 $2\sqrt{41}$ cm.

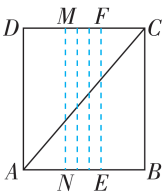
8. 13　【解析】长方体的侧面展开图如图所示，$PA=2\times(4+2)=12$(cm)，$QA=5$ cm，∴ $PQ=\sqrt{PA^2+AQ^2}=13$ cm. 故答案为 13.



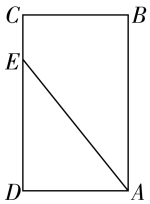
9. 26　【解析】根据勾股定理得这根细棉线的长度最短是 $\sqrt{\left(4\times 2\pi\times\frac{3}{\pi}\right)^2+10^2}=26$(cm). 故答案

为 26.

10. 【解】如图，由题意知 $AB=8+2\times1=10$（厘米），$BC=12$ 厘米，则最短路程为 $\sqrt{10^2+12^2}=2\sqrt{61}$（厘米）.



11. 【解】将可供滑行部分展开为平面图，如图. $AD=\pi R=3\pi$ m，$AB=CD=45$ m，$DE=CD-CE=45-5=40$（m）. 在 Rt $\triangle ADE$ 中，$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{(3\pi)^2+40^2}=\sqrt{(3\times3)^2+40^2}=41$（m）. 故他滑行的最短路程为 41 m.



12. 【解】（1）∵ 圆柱的底面半径为 1 cm，高 AB 为 5 cm，∴ 路线 1：如题图（2），$l_1^2=AC^2=AB^2+BC^2=5^2+\pi^2=25+\pi^2$；

路线 2：如题图（1），$l_2^2=(AB+BC)^2=(5+2)^2=49$.

∵ $l_1^2-l_2^2=25+\pi^2-49=\pi^2-24<0$，

∴ $l_1^2<l_2^2$，∴ $l_1<l_2$.

（2）∵ 圆柱的底面半径为 r cm，高为 h cm，

∴ 路线 1：如题图（2），$l_1^2=AC^2=AB^2+BC^2=h^2+(\pi r)^2=h^2+r^2\pi^2$；

路线 2：如题图（1），$l_2^2=(AB+BC)^2=(h+2r)^2=h^2+4r^2+4hr$.

∵ $l_1^2-l_2^2=h^2+r^2\pi^2-h^2-4r^2-4hr=r[r(\pi^2-4)-4h]$.

当路线 2 较短时，$l_1^2>l_2^2$.

∵ $r>0$，∴ $r(\pi^2-4)-4h>0$，∴ $\dfrac{r}{h}>\dfrac{4}{\pi^2-4}$，

∴ 当 $\dfrac{r}{h}>\dfrac{4}{\pi^2-4}$ 时，选择路线 2 较短.

（3）$l_1^2=25+(2\pi r)^2$，$l_2^2=(5+4r)^2$.

由题意，得 $25+(2\pi r)^2=(5+4r)^2$，

解得 $r=\dfrac{10}{\pi^2-4}$，

∴ 当圆柱的底面半径 r 为 $\dfrac{10}{\pi^2-4}$ cm 时，蚂蚁从点 A 出发沿圆柱表面爬行到 C 点的两条路线长度相等.

模型 25　“将军饮马”模型

1. $\dfrac{2}{7}$　【解析】如图，作点 F 关于 AC 的对称点 F'，连接 EF' 交 AC 于点 P，过点 F' 作 $F'K\perp AD$ 交 AC 于点 K. 由题意得此时 F' 落在 AD 上，且根据对称的性质可知，此时 $PE+PF$ 取得最小值，为 EF' 的长度. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，则 $AF'=AF=\dfrac{2}{3}a$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle F'AK=45°$，$\angle PAE=45°$，$AC=\sqrt{2}a$.

∵ $F'K\perp AF'$，∴ $\angle F'KA=\angle F'AK=45°$，

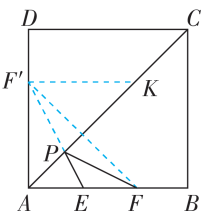
∴ $AK=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$.

∵ $\angle F'PK=\angle EPA$，$\angle F'KP=\angle KAE$，

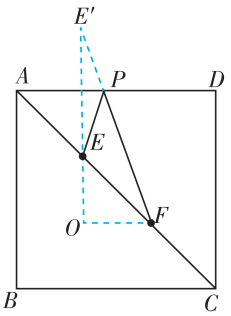
∴ $\triangle F'KP\backsim\triangle EAP$，

∴ $\dfrac{F'K}{AE}=\dfrac{KP}{AP}=2$，∴ $AP=\dfrac{1}{3}AK=\dfrac{2\sqrt{2}}{9}a$，

∴ $CP=AC-AP=\dfrac{7\sqrt{2}}{9}a$，∴ $\dfrac{AP}{CP}=\dfrac{2}{7}$，∴ 当 $PE+PF$ 取得最小值时，$\dfrac{AP}{PC}$ 的值是 $\dfrac{2}{7}$，故答案为 $\dfrac{2}{7}$.

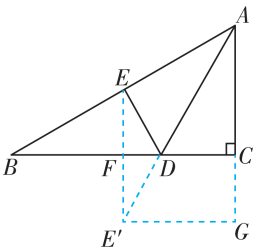


2. B　【解析】∵ 点 E，F 是 AC 的三等分点，∴ 点 P 在正方形 $ABCD$ 的任何一条边上时情况均相同. 设点 P 在边 AD 上. 如图，作点 E 关于 AD 的对称点 E'，连接 $E'F$，交 AD 于点 P，连接 PE，此时 $PE+PF$ 的值最小，最小值为 $E'F$ 的长. 过点 F 作 $FO\perp E'E$，交 $E'E$ 的延长线于点 O. ∵ 正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 将对角线 AC 三等分，且 $AC=12$，∴ $AE=EF=FC=4$. ∵ 易得 $E'O/\!/AB$，∴ $\angle FEO=\angle CAB=45°$. ∵ $FO\perp E'O$，

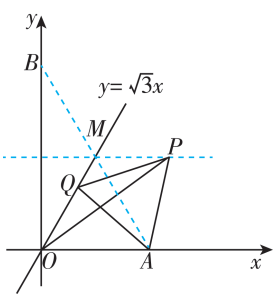


∴ △OEF 为等腰直角三角形，∴ $OE=OF=2\sqrt{2}$，易得 $E'O=3OE=6\sqrt{2}$. 根据勾股定理，得 $E'F=\sqrt{FO^2+E'O^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(6\sqrt{2})^2}=4\sqrt{5}$. 故选 B.

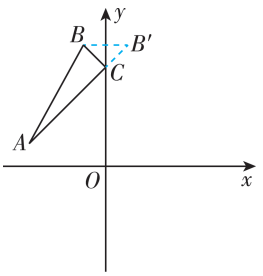
3. C 【解析】如图，作点 E 关于 BC 的对称点 E'，EE' 交 BC 于 F，连接 DE'，过点 E' 作 $E'G\perp AC$ 交 AC 的延长线于点 G，则 $DE=DE'$，$EF=E'F$，$DE+DA=DE'+DA$. 当 A，D，E' 在同一直线上时，$DE+DA$ 的最小值为 AE' 的长. ∵ ∠ACB=90°，∠ABC=30°，$BC=4\sqrt{3}$，∴ $AC=\frac{\sqrt{3}}{3}BC=\frac{\sqrt{3}}{3}\times4\sqrt{3}=4$. ∵ 点 E 为边 AB 的中点，$EF\perp BC$，∴ $EF=\frac{1}{2}AC=2$，$FC=\frac{1}{2}BC=2\sqrt{3}$，∴ $E'F=2=CG$，$E'G=CF=2\sqrt{3}$，∴ $AG=AC+CG=4+2=6$，∴ $AE'=\sqrt{E'G^2+AG^2}=4\sqrt{3}$. 故选 C.



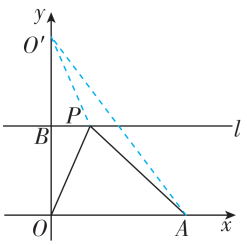
4. C 【解析】如图，作 ∠OAM=60°，射线 AM 交直线 OQ 于点 M，作直线 PM. 由直线 $y=\sqrt{3}x$ 可知，∠MOA=60°，∴ ∠MOA=∠OAM=60°，∴ △OAM 是等边三角形，∴ $OA=OM$. ∵ △APQ 是等边三角形，∴ $AQ=AP$，∠PAQ=60°，∴ ∠OAQ=∠MAP，∴ △OAQ≌△MAP(SAS)，∴ ∠QOA=∠PMA=60°=∠MAO，∴ $PM/\!/x$ 轴，即点 P 在直线 PM 上运动. 作点 O 关于直线 PM 的对称点 B，连接 MB，则 $BM=MO$，∴ ∠BOM=∠OBM=30°，∴ ∠BMO=120°. 又 ∵ ∠OMA=60°，∴ ∠BMO+∠OMA=180°，∴ B，M，A 三点共线，∴ 当点 P 与点 M 重合时，$OP+AP$ 取得最小值，AB 的长即为所求最小值. 此时在 Rt△OAB 中，$OA=4$，∠BAO=60°，∠OBA=30°，∴ $AB=2OA=8$. 故选 C.



5. 4 【解析】如图，作点 B 关于 y 轴的对称点 $B'(1,5)$. 当 A，C，B' 三点共线时，△ABC 的周长最短. 设直线 AB' 的解析式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}-3k+b=1,\\k+b=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=4,\end{cases}$ ∴ $y=x+4$，当 $x=0$ 时，$y=4$，∴ $m=4$.



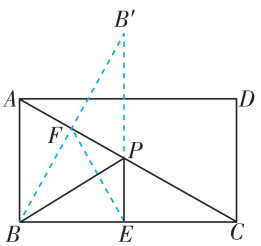
（第 5 题图）



（第 6 题图）

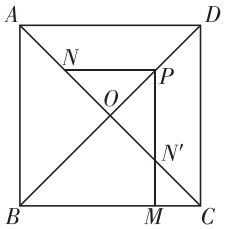
6. 5 【解析】取点 $O'(0,4)$，连接 $O'P$，$O'A$，如图. ∵ $B(0,2)$，直线 l 垂直于 y 轴，∴ 点 $O'(0,4)$ 与点 $O(0,0)$ 关于直线 l 对称，∴ $PO'=PO$，∴ $PO+PA=PO'+PA\geqslant O'A$，即 $PO+PA$ 的最小值为 $O'A$ 的长. 在 Rt△$O'AO$ 中，∵ $OA=3$，$OO'=4$，∴ 由勾股定理，得 $O'A=\sqrt{OA^2+OO'^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，∴ $PO+PA$ 的最小值为 5. 故答案为 5.

7. 6 【解析】如图，作点 B 关于 AC 的对称点 B'，交 AC 于点 F，连接 $B'E$ 交 AC 于点 P，连接 BP，则 $BP=B'P$，∴ $PE+PB$ 的最小值为 $B'E$ 的长度. ∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形，∴ $AB=CD=4$，∠ABC=90°. 在 Rt△ABC 中，$AB=4$，$BC=4\sqrt{3}$，∴ $\tan\angle ACB=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴ ∠$ACB$=30°. 由对称的性质可知，$B'B=2BF$，$B'B\perp AC$，∴ $BF=\frac{1}{2}BC=2\sqrt{3}$，∠$CBF$=60°，∴ $B'B=2BF=4\sqrt{3}$. 连接 EF. ∵ E 为 BC 的中点，∴ $BE=\frac{1}{2}BC=2\sqrt{3}$，∴ $BE=BF$. ∵ ∠CBF=60°，∴ △BEF 是等边三角形，∴ $BF=EF=B'F$，∴ △BEB' 是直角三角形，∴ $B'E=\sqrt{B'B^2-BE^2}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}=6$，∴ $PE+PB$ 的最小值为 6. 故答案为 6.

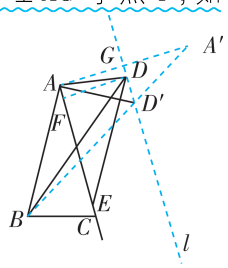


8. 2 【解析】如图所示，作点 N 关于 BD 的对称点 N'，连接 MN' 并延长交 BD 于 P，连接 NP，此时 $PM-PN$ 取得最大值. 根据轴对称性质可知，

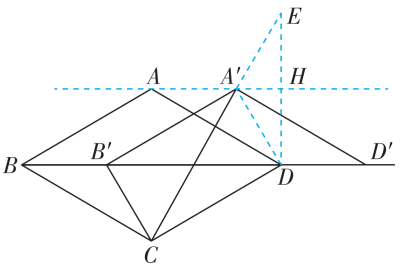
$PN=PN'$，则 $PM-PN$ 的最大值为 $PM-PN'=MN'$. ∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为 8，∴ $AC=\sqrt{2}AB=8\sqrt{2}$. ∵ O 为 AC 的中点，∴ $AO=OC=4\sqrt{2}$. ∵ N 为 OA 的中点，∴ $ON=2\sqrt{2}$，∴ $ON'=CN'=2\sqrt{2}$，∴ $AN'=6\sqrt{2}$. ∵ $BM=6$，∴ $CM=CB-BM=8-6=2$，∴ $\dfrac{CM}{BM}=\dfrac{CN'}{AN'}=\dfrac{1}{3}$，∴ $PM/\!/AB/\!/CD$，∴ $\angle CMN'=90°$. ∵ $\angle N'CM=45°$，∴ $\triangle N'CM$ 为等腰直角三角形，∴ $CM=MN'=2$，即 $PM-PN$ 的最大值为 2. 故答案为 2.



9. 45°　【解析】过点 D 作 $DF\perp AC$ 于点 F，如图. ∵ $DE/\!/AB$，∴ $\angle DEF=\angle BAC=30°$. ∵ $DF\perp AC$，∴ $DF=\dfrac{1}{2}DE=1$，∴ 点 D 到直线 AC 的距离等于定值 1. 过点 D 作直线 $l/\!/AC$，则点 D 在直线 l 上运动，作点 A 关于直线 l 的对称点 A'，设 AA' 交直线 l 于点 G，连接 $A'B$ 交直线 l 于点 D'，连接 AD'，由“将军饮马”模型可知，点 D 与点 D' 重合时，$AD+BD$ 的值最小，最小值为 $A'B$ 的长. ∵ $AA'\perp l$，$AG=GA'$，$l/\!/AC$，$DF\perp AC$，∴ 四边形 $AFDG$ 为矩形，∴ $AG=DF=1$，∴ $AA'=AG+A'G=2$. ∵ $AB=AC=2$，∴ $AB=AA'$，∴ $\angle ABA'=\angle A'$. ∵ $\angle BAC=30°$，$\angle FAG=90°$，∴ $\angle BAA'=120°$，∴ $\angle ABA'=\angle A'=\dfrac{180°-120°}{2}=30°$. ∵ $\angle BAC=30°$，$AB=AC=2$，∴ $\angle ABC=\angle ACB=\dfrac{180°-30°}{2}=75°$，∴ $\angle D'BC=\angle ABC-\angle ABD'=45°$. 故答案为 45°.



10.【解】连接 $A'D$，如图. ∵ 菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle ABC=60°$，∴ $AB=CD=2$，$AB/\!/CD$，易知 $\angle ABD=\angle ADB=\angle BDC=30°$. ∵ 将 $\triangle ABD$ 沿射线 BD 的方向平移，得到 $\triangle A'B'D'$，∴ $A'B'=AB=CD=2$，$A'B'/\!/AB/\!/CD$，∴ 四边形 $A'B'CD$ 是平行四边形，∴ $A'D=B'C$，∴ $A'C+B'C=A'C+A'D$. 由题意知点 A' 在过点 A 且平行于 BD 的定直线上，作点 D 关于该直线的对称点 E，连接 CE 交该直线于 A'，则 CE 的长度即为 $A'C+B'C$ 的最小值. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AHD$ 中，∵ $\angle HAD=\angle ADB=30°$，$AD=2$，∴ $DH=EH=\dfrac{1}{2}AD=1$，∴ $DE=2$，∴ $DE=CD$. ∵ $\angle CDE=\angle EDB'+\angle CDB'=90°+30°=120°$，∴ $\angle E=\angle DCE=30°$，∴ $CE=2CD\cdot\cos 30°=2\sqrt{3}$，即 $A'C+B'C$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$.



11.【解】如图，在 DC 上截取 DT，使得 $DT=DE$，连接 FT，PT，过点 T 作 $TH\perp AB$ 于点 H.

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $\angle A=\angle ADT=90°$.

∵ $\angle AHT=90°$，

∴ 四边形 $AHTD$ 是矩形.

∵ $AE=DE=\dfrac{1}{2}AD=3$，$AF=FB=\dfrac{1}{2}AB=4$，

∴ $AH=DT=3$，$HF=AF-AH=4-3=1$，$HT=AD=6$，

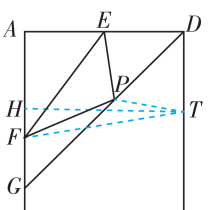
∴ $FT=\sqrt{FH^2+TH^2}=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}$.

∵ DG 平分 $\angle ADC$，$DE=DT$，

∴ E，T 关于 DG 对称，∴ $PE=PT$，

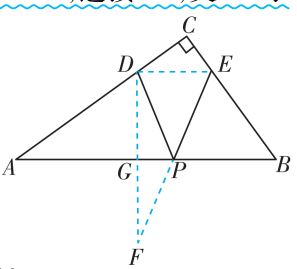
∴ $PE+PF=PF+PT\geqslant FT=\sqrt{37}$，

∴ $PE+PF$ 的最小值为 $\sqrt{37}$.



12.【解】如图，连接 DE，过点 D 作 $DG\perp AB$ 于 G，延长 DG 到 F，使 $FG=DG$，连接 EF，交 AB 于 P，连接 PD，则 $PD+PE=PF+PE=EF$，此时 $PD+PE$ 取得最小值.

∵ $AC=24$，$BC=18$，$CD=8$，$CE=6$，$\angle C=90°$，



$\therefore DE=\sqrt{CD^2+CE^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，$\dfrac{CD}{CA}=\dfrac{CE}{BC}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle CAB$，

$\therefore \angle CDE=\angle A$，

$\therefore DE/\!/AB$，$\cos A=\cos\angle CDE$，

$\therefore \dfrac{AG}{AD}=\dfrac{CD}{DE}$，即$\dfrac{AG}{24-8}=\dfrac{8}{10}$，$\therefore AG=\dfrac{64}{5}$.

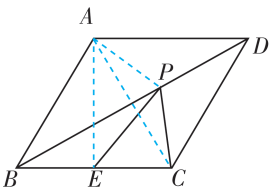
$\because PG/\!/DE$，$FG=DG$，

$\therefore PG$ 是$\triangle FDE$ 的中位线，$\therefore PG=\dfrac{1}{2}DE=5$，

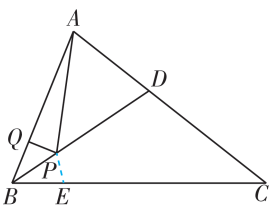
$\therefore AP=AG+PG=\dfrac{64}{5}+5=\dfrac{89}{5}$.

模型 26　“两动一定”模型

1. D　【解析】连接 AC，PA，AE，如图所示. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore$ 点 A 和点 C 关于 BD 对称，$\therefore PC=PA$，$\therefore PE+PC=PE+PA\geqslant AE$. 当 $AE\perp BC$ 且 A，P，E 共线时，$PE+PA$ 的值最小，即 $PC+PE$ 的值最小，此时 $PC+PE=AE$. $\because$ 菱形 $ABCD$ 的边长为 2 cm，$\angle BAD=120°$，$\therefore \angle ABE=60°$，$\therefore \angle BAE=30°$，$\therefore BE=\dfrac{1}{2}AB=1$ cm，$\therefore AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$(cm)，即 $PC+PE$ 的最小值是$\sqrt{3}$ cm，故选 D.

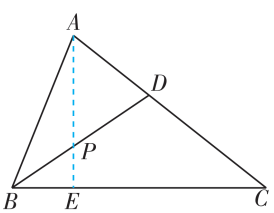


2. D　【解析】在 BC 上截取 $BE=BQ$，连接 PE，如图(1)所示. $\because BD$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle ABD=\angle CBD=\dfrac{1}{2}\angle ABC=34°$. $\because BP=BP$，$BQ=BE$，$\therefore \triangle PBQ\cong\triangle PBE$(SAS)，$\therefore PE=PQ$，$\therefore AP+PQ=AP+PE$，$\therefore$ 当 A，P，E 在同一直线上，且 $AE\perp BC$ 时，$AP+PE$ 的值最小，即 $AP+PQ$ 的值最小. 过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E，交 BD 于点 P，如图(2)所示.



图(1)

$\because \angle AEB=90°$，$\angle ABE=68°$，$\therefore \angle BAE=90°-\angle ABE=22°$，$\therefore \angle APB=180°-\angle ABP-\angle BAP=124°$. 故选 D.

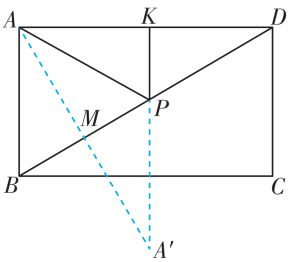


图(2)

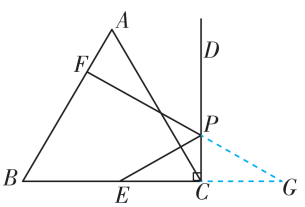
关键点拨

点 A 是定点，点 P，Q 是动点，求“当 $AP+PQ$ 的值最小时，$\angle APB$ 的度数”符合“两动一定”模型.

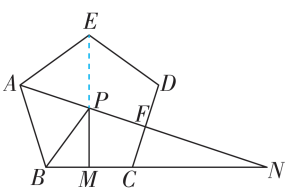
3. A　【解析】如图，作 A 点关于 BD 的对称点 A'，AA' 交 BD 于 M，过 A' 作 $A'K\perp AD$ 交 BD 于点 P，交 AD 于点 K，连接 AP. 由对称性可知，$AP=A'P$，$\therefore AP+PK=A'P+PK=A'K$，此时 $PA+PK$ 的值最小. $\because \angle ABD=60°$，$\angle AMB=90°$，$\therefore \angle BAA'=30°$. $\because AB=4$，$\therefore BM=2$，$AM=2\sqrt{3}$，$\therefore AA'=4\sqrt{3}$. $\because A'K\perp AD$，$\therefore A'K/\!/AB$，$\therefore \angle AA'K=\angle BAA'=30°$. 在 Rt$\triangle AA'K$ 中，$\angle AA'K=30°$，$\therefore A'K=6$，$\therefore AP+PK$ 的最小值为 6. 故选 A.



4. A　【解析】$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore AC=BC$，$\angle B=60°$. 如图，作点 E 关于直线 CD 的对称点 G，过 G 作 $GF\perp AB$ 于 F，交 CD 于 P，此时 $EP+PF$ 的值最小. $\because \angle B=60°$，$\angle BFG=90°$，$\therefore \angle G=30°$. $\because BF=7$，$\therefore BG=2BF=14$，$\therefore EG=8$，$\therefore CE=CG=4$，$\therefore AC=BC=10$. 故选 A.

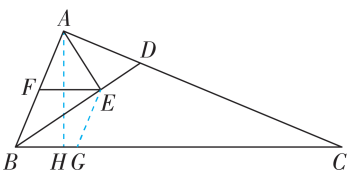


5. C　【解析】如图，作 $EM\perp BC$ 于 M，交 AN 于点 P. $\because$ 正五边形 $ABCDE$ 中，点 F 是边 CD 的中点，$\therefore$ 直线 AN 是正五边形 $ABCDE$ 的对称轴，$\therefore$ 点 B 与点 E 关于直线 AN 对称，$\therefore PB=PE$，$\therefore PB+PM$ 的值最小，即 $PE+PM$ 的值最小，$\therefore$ 点 E、点 P、点 M 在一条直线上，且 $EM\perp BC$ 时，$PE+PM$ 的值最小，此时直线 EM 是正五边形 $ABCDE$ 的对称轴，易知点 P 为正五边形 $ABCDE$ 的中心，$\therefore PA=PB=PE$. 正五边形 $ABCDE$ 的内角 $\angle BAE=\dfrac{(5-2)\times180°}{5}=108°$. 由对称性可

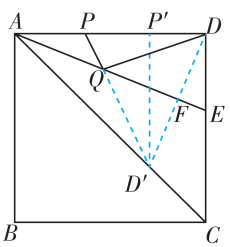


知，$\angle BAN=\angle EAN=\frac{1}{2}\angle BAE=54°$. 在 $\triangle ABP$ 中，$PA=PB$，则 $\angle BAP=\angle ABP=54°$，$\therefore\ \angle BPN=2\angle ABP=108°$. 故选 C.

6. $\frac{60}{13}$　【解析】如图所示，在 BC 边上截取 $BG=BF$，连接 EG，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H. $\because$ BD 平分 $\angle ABC$ 交边 AC 于点 D，$\therefore\ \angle FBE=\angle GBE$. $\because$ $BG=BF$，$BE=BE$，$\therefore\ \triangle BGE\cong\triangle BFE$，$\therefore EF=EG$，$\therefore AE+EF=AE+EG$，当且仅当点 A，E，G 共线，且 AG 与 BC 垂直时，$AE+EF$ 的值最小，最小值为 AH 的长. $\because$ $AB=5$，$AC=12$，$\angle BAC=90°$，$\therefore$ $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=13$. $\because$ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AH$，$\therefore AH=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{5\times12}{13}=\frac{60}{13}$，$\therefore AE+EF$ 的最小值为 $\frac{60}{13}$.



7. 【解】如图，过点 D 作 AE 的垂线，交 AE 于点 F，交 AC 于点 D'，连接 QD'，过点 D' 作 $D'P'\perp AD$ 于点 P'，



$\therefore\ \angle AFD=\angle AFD'=90°$.

$\because$ AE 为 $\angle DAC$ 的平分线，

$\therefore\ \angle DAE=\angle D'AE$.

$\because$ $AF=AF$，

$\therefore\ \triangle ADF\cong\triangle AD'F$(ASA)，

$\therefore$ $DF=D'F$，

$\therefore$ 点 D 与点 D' 关于 AE 所在直线对称，

$\therefore$ $QD=QD'$，$\therefore$ $QP+QD=QP+QD'$.

$\because$ $QP+QD'\geqslant D'P'$，

$\therefore$ $DQ+PQ$ 的最小值为 $D'P'$ 的长.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore\ \angle DAC=45°$.

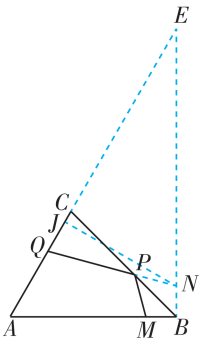
$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 6，点 D，D' 关于 AE 所在直线对称，

$\therefore$ $AD=AD'=6$.

在 Rt$\triangle AD'P'$ 中，$AD'=6$，$\angle P'AD'=45°$，

$\therefore D'P'=\frac{AD'}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，$\therefore$ $DQ+PQ$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$.

8. 【解】如图，过点 B 作 $EB\perp AB$ 交 AC 的延长线于点 E，在 BE 上截取 BN，使得 $BN=BM=\sqrt{3}$，过点 N 作 $NJ\perp AE$ 于点 J，连接 PN.



$\because$ $\angle ABC=45°$，$BE\perp AB$，

$\therefore\ \angle ABC=\angle EBC=45°$.

$\because$ $BM=BN$，$BP=BP$，

$\therefore\ \triangle MBP\cong\triangle NBP$，

$\therefore$ $PM=PN$，

$\therefore$ $PM+PQ=PN+PQ\geqslant NJ$.

$\because$ $\angle A=60°$，$\angle ABE=90°$，$AB=11$，

$\therefore BE=AB\cdot\tan 60°=11\sqrt{3}$.

$\because$ $BN=\sqrt{3}$，

$\therefore EN=EB-BN=10\sqrt{3}$.

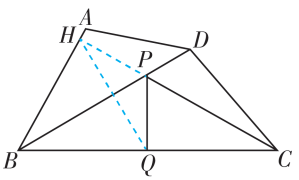
$\because$ $\angle E=30°$，$NJ\perp AE$，

$\therefore NJ=\frac{1}{2}EN=5\sqrt{3}$，

$\therefore PM+PQ\geqslant5\sqrt{3}$，

$\therefore$ $PM+PQ$ 的最小值为 $5\sqrt{3}$.

9. 【解】如图，作点 Q 关于 BD 的对称点 H，连接 CH 交 BD 于 P，则 $PQ=PH$.



$\because$ BD 平分 $\angle ABC$，

$\therefore$ 点 Q 关于 BD 的对称点 H 在 AB 上.

$\because$ $PQ=PH$，

$\therefore$ $CP+PQ=CP+PH$，

$\therefore$ 当 C，H，P 三点在同一直线上，且 $CH\perp AB$ 时，$CP+PQ$ 的值最小，为 CH 的长.

$\because$ $\angle ABC=60°$，$CH\perp AB$，

$\therefore\ \angle BCH=30°$，

$\therefore BH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times24=12$.

$\because$ H，Q 关于 BD 对称，

$\therefore$ $BQ=BH$，

$\therefore$ $BQ=12$.

10. 【解】如图所示，连接 CE，过点 C 作 $CF'\perp AB$ 于 F'，交 AD 于点 E'，连接 BE'.

$\because$ $AB=AC$，$AD\perp BC$，

$\therefore$ $CD=BD$，$\angle ADC=\angle ADB=90°$.

又∵ $DE=DE$,

∴ $\triangle CDE\cong\triangle BDE(SAS)$,

∴ $CE=BE$,

∴ $BE+EF=CE+EF$,

∴ 当 C,E,F 三点共线且 $CF\perp AB$ 时,$CE+EF$ 的值最小,即此时 $BE+EF$ 的值最小,最小值为 CF' 的长.

∵ $\angle BAC=40°$,

∴ $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=20°$,∴ $\angle ABD=70°$.

∵ 当 $BE+EF$ 的值最小时,$\angle CF'B=90°$,

∴ $\angle BCF'=20°$.

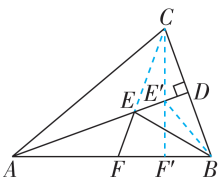
∵ $DC=DB$,$\angle CDE'=\angle BDE'$,$DE'=DE'$,

∴ $\triangle CDE'\cong\triangle BDE'$,

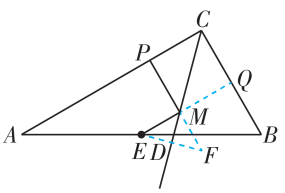
∴ $CE'=BE'$,则 $\angle CBE'=\angle BCE'=20°$,

∴ $\angle BE'F'=\angle CBE'+\angle BCE'=40°$,

∴ 当 $BE+EF$ 取得最小值时,$\angle BEF$ 的度数为 40°.



11. 【解】如图,



作点 E 关于 CD 所在直线的对称点 F,作 $FP\perp AC$ 于 P,交 CD 于 M,则 $PM+ME$ 的值最小,延长 EM 交 BC 于 Q.

∵ $\angle ACB=90°$,CD 平分 $\angle ACB$,

∴ $\angle ACD=45°$.

∵ $\angle CPM=90°$,

∴ $\angle FMD=\angle PMC=90°-\angle ACD=45°$,

∴ $\angle EMD=\angle FMD=45°$,$CP=PM$,

∴ $\angle PMQ=\angle EMF=90°$,

∴ 四边形 $CQMP$ 是矩形.

又∵ $CP=PM$,

∴ 矩形 $CQMP$ 是正方形,∴ $CQ=CP$.

∵ $\angle ACB=90°$,$\angle A=30°$,$BC=6$,

∴ $AB=2BC=12$,

∴ $BE=\frac{1}{2}AB=6$,

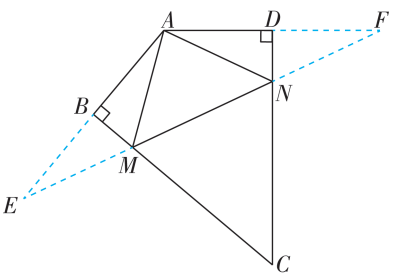
∴ 易知 $BQ=3$,

∴ $CQ=BC-BQ=3$,

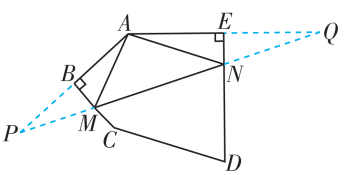
∴ $CP=3$.

模型 27　“一定两动”模型

1. C 【解析】如图,作 A 点关于 CD 的对称点 F,作 A 点关于 BC 的对称点 E,连接 EF 交 CD 于 N,交 BC 于 M,∴ $AN=NF$,$AM=EM$,∴ $\triangle AMN$ 的周长为 $AM+AN+MN=NF+MN+EM=EF$,此时 $\triangle AMN$ 的周长最小. ∵ $\angle ABC=\angle ADC=90°$,∴ A,B,E 共线,A,D,F 共线,∴ $\angle FAN=\angle F$,$\angle E=\angle EAM$,$\angle E+\angle F=180°-\angle BAD$. ∵ $\angle BAD=130°$,∴ $\angle E+\angle F=50°$,∴ $\angle BAM+\angle FAN=50°$,∴ $\angle MAN=130°-50°=80°$,∴ $\angle ANM+\angle AMN=180°-\angle MAN=100°$,故选 C.

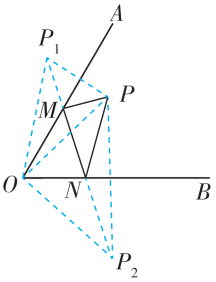


2. D 【解析】如图,作点 A 关于 BC 的对称点 P,关于 DE 的对称点 Q,连接 PQ,与 BC 相交于点 M,与 DE 相交于点 N,此时 $\triangle AMN$ 的周长最小,$AM=PM$,$AN=QN$,∴ $\triangle AMN$ 的周长为 $AM+MN+AN=PM+MN+QN=PQ$. ∵ $\angle ABC=90°$,$\angle AEN=90°$,∴ A,B,P 共线,A,E,Q 共线,∴ $\angle P=\angle PAM$,$\angle Q=\angle QAN$,∴ $\angle AMN=\angle P+\angle PAM=2\angle P$,$\angle ANM=\angle Q+\angle QAN=2\angle Q$,∴ $\angle AMN+\angle ANM=2(\angle P+\angle Q)$. ∵ $\angle AMN+\angle ANM=84°$,∴ $\angle P+\angle Q=42°$,∴ $\angle BAE=180°-42°=138°$,故选 D.

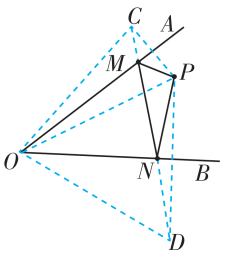


3. B 【解析】如图,分别作点 P 关于 OA,OB 的对称点 P_1,P_2,连接 P_1P_2,交 OA 于 M,交 OB 于

N,连接 OP,OP_1,OP_2,此时△PMN 的周长最小,$OP_1 = OP = OP_2$,易得 $\angle OP_1M = \angle MPO$,$\angle NPO = \angle NP_2O$. 根据轴对称的性质可得 $MP = P_1M$,$PN = P_2N$,∴ △PMN 的周长的最小值为 P_1P_2 的长. 由轴对称的性质可得 $\angle P_1OP_2 = 2\angle AOB$,∴ △$OP_1P_2$ 中,$\angle OP_1P_2 + \angle OP_2P_1 = 180° - \angle P_1OP_2 = 180° - 2\angle AOB$,∴ $\angle MPN = \angle OPM + \angle OPN = \angle OP_1M + \angle OP_2N = 180° - 2\angle AOB = 60°$,故选 B.



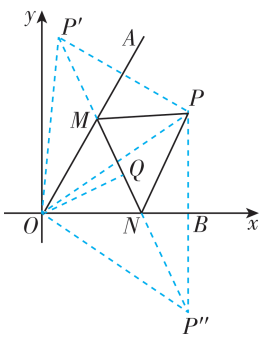
4. 40°　**【解析】**如图,作 P 点关于 OA 的对称点 C,作 P 点关于 OB 的对称点 D,连接 CD,交 OA 于点 M,交 OB 于点 N,连接 OC,OD,OP,此时△PMN 的周长最小,$MP = CM$,$PN = ND$,∴ △PMN 的周长为 $MP + MN + NP = CM + MN + DN = CD$. 由对称的性质可知 $OC = OP = OD$,易得 $\angle OCM = \angle OPM$,$\angle OPN = \angle ODN$. ∵ $\angle MPN = 100°$,∴ $\angle OCM + \angle ODN = 100°$,∴ $\angle COD = 80°$. ∵ $\angle COM = \angle MOP$,$\angle PON = \angle NOD$,∴ $\angle MON = \frac{1}{2}\angle COD = 40°$. 故答案为 40°.



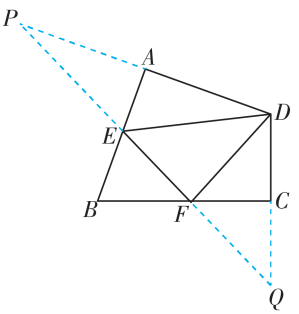
关键点拨

P 为 $\angle AOB$ 内一定点,M,N 分别是射线 OA,OB 上的动点,当△PMN 的周长最小时求角度,符合“一定两动”模型.

5. $5\sqrt{3}$　**【解析】**如图,分别作点 P 关于射线 OA、射线 OB 的对称点 P',P'',连接 $P'P''$,与 OA,OB 分别交于 M,N 两点,此时△PMN 的周长最小,最小值为 $P'P''$ 的长,连接 OP',OP'',OP. 由对称可得 $OP' = OP = OP''$,$\angle POA = \angle P'OA$,$\angle POB = \angle P''OB$. ∵ $P(4,3)$,∴ $OP' = OP = OP'' = \sqrt{4^2+3^2} = 5$. ∵ $\angle AOB = \angle AOP + \angle BOP = 60°$,∴ $\angle P'OP'' = 120°$. 过 O 作 $OQ \perp P'P''$,可得 $P'Q = P''Q$,$\angle OP'Q = \angle OP''Q = 30°$,∴ $OQ = \frac{5}{2}$,$P'Q = P''Q = \frac{5\sqrt{3}}{2}$,∴ $P'P'' = 2P'Q = 2\times\frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$,则△$PMN$ 周长的最小值是 $5\sqrt{3}$.



6. **【解】**如图,作点 D 关于 BA 的对称点 P,点 D 关于 BC 的对称点 Q,连接 PQ,交 AB 于 E,交 BC 于 F,此时△DEF 的周长最小.

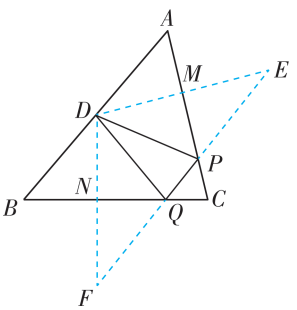


∵ 四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD = \angle BCD = 90°$,$\angle ABC = \alpha$,∴ $\angle ADC = 180° - \alpha$,$P$,$A$,$D$ 共线,D,C,Q 共线.

由轴对称知,$\angle ADE = \angle P$,$\angle CDF = \angle Q$.

在 △PDQ 中,$\angle P + \angle Q = 180° - \angle ADC = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$,∴ $\angle ADE + \angle CDF = \angle P + \angle Q = \alpha$,∴ $\angle EDF = \angle ADC - (\angle ADE + \angle CDF) = 180° - \alpha - \alpha = 180° - 2\alpha$.

7. **【解】**如图,作点 D 关于 BC 的对称点 F,交 BC 于 N,作点 D 关于 AC 的对称点 E,交 AC 于 M,连接 EF,交 AC,BC 于点 P,Q,此时△PDQ 的周长最小. 由对称可得 $DF \perp BC$,$DE \perp AC$,$DQ = FQ$,$PD = PE$,$\angle FDQ = \angle F$,$\angle E = \angle PDM$,



∴ $DQ + DP + PQ = FQ + QP + PE = EF$,即 EF 的长是△DPQ 周长的最小值,$\angle FDQ = \frac{1}{2}\angle DQP$,$\angle MDP = \frac{1}{2}\angle DPQ$.

在△ABC 中,$\angle A = 54°$,$\angle C = 76°$,

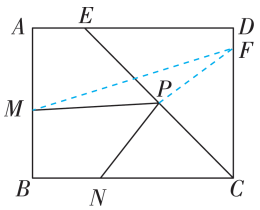
∴ $\angle B = 50°$,$\angle ADM = 36°$,∴ $\angle BDN = 40°$,

∴ $\angle QDP = 180° - \angle BDN - \angle ADM - \angle FDQ - \angle MDP = 180° - 40° - 36° - \frac{1}{2}(\angle DQP + \angle DPQ) = 104° - \frac{1}{2}(180° - \angle PDQ) = 104° - 90° + \frac{1}{2}\angle QDP$,

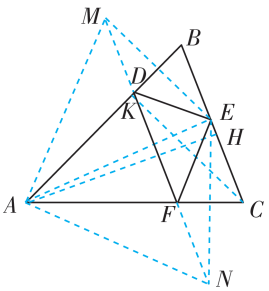
解得 $\angle QDP=28°$. 故当 $\angle PDQ=28°$ 时，$\triangle PDQ$ 的周长最小.

模型 28　“三动点”模型

1. $2\sqrt{2}$　【解析】如图，在 CD 上截取 $CF=CN$，连接 PF，MF. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle BCD=\angle ADC=90°$，$CD=AB=3$. ∵ $CD=DE=3$，∴ $\angle DCE=\angle DEC=45°$，∴ $\angle BCE=45°$. ∵ $CP=CP$，∴ $\triangle CPN\cong\triangle CPF$，∴ $PN=PF$. ∵ $PM+PN=4$，∴ $PM+PF=4$. ∵ $PM+PF\geqslant MF\geqslant AD$，$AD=BC=4$，∴ 当 M，P，F 三点共线且 $MF\perp CD$ 时，$PM+PN=4$ 成立，此时四边形 $BCFM$ 是矩形，∴ $CF=BM$. 设 $BM=BN=x$，则 $CN=CF=4-x$，∴ $4-x=x$，∴ $x=2$，∴ $CF=2$. ∵ $MF\perp CD$，$\angle DCE=45°$，∴ $PF=CF=2$，∴ $PC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. 故答案为 $2\sqrt{2}$.



2. 【解】如图，作 E 关于 AB 的对称点 M，作 E 关于 AC 的对称点 N，连接 AE，MN，AM，AN，MN 交 AB 于 D，交 AC 于 F，作 $AH\perp BC$ 于 H，$CK\perp AB$ 于 K.



由对称性可知 $DE=DM$，$FE=FN$，$AE=AM=AN$，∴ $\triangle DEF$ 的周长为 $DE+FD+EF=DM+DF+FN=MN$，∴ 此时 $\triangle DEF$ 的周长最小.

∵ $\angle BAC=45°$，$\angle BAE=\angle BAM$，$\angle CAE=\angle CAN$，

∴ $\angle MAN=90°$，

∴ $\triangle MNA$ 是等腰直角三角形，

∴ $MN=\sqrt{2}AM=\sqrt{2}AE$，

∴ 当 AE 的长最小时，MN 的长最小.

∵ $AC=2\sqrt{2}$，$CK\perp AB$，$\angle BAC=45°$，

∴ $AK=KC=2$.

∵ $AB=3$，∴ $BK=AB-AK=1$.

在 Rt$\triangle BKC$ 中，$\angle BKC=90°$，$BK=1$，$CK=2$，

∴ $BC=\sqrt{BK^2+CK^2}=\sqrt{5}$.

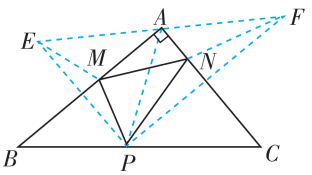
∵ $\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CK$，∴ $AH=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

根据垂线段最短可知，当 AE 与 AH 重合时，AE 的长最小，最小值为 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$，

∴ MN 的最小值为 $\frac{6\sqrt{10}}{5}$，

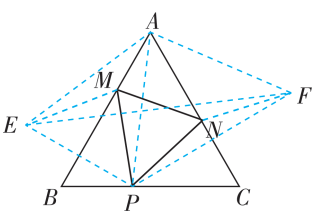
∴ $\triangle DEF$ 的周长的最小值为 $\frac{6\sqrt{10}}{5}$.

3. 【解】如图，作点 P 关于 AB，AC 的对称点 E，F，连接 PA，EM，FN，AE，AF.



∵ $\angle BAC=90°$，$AB=4$，$AC=3$，∴ $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. 由对称的性质可知，$EM=MP$，$NF=NP$，$AE=AP=AF$，$\angle BAP=\angle BAE$，$\angle CAP=\angle CAF$. ∵ $\angle PAB+\angle PAC=\angle BAC=90°$，∴ $\angle EAF=180°$，∴ E，A，F 共线. ∵ $ME=MP$，$NF=NP$，∴ $PM+MN+PN=EM+MN+NF$. ∵ $EM+MN+NF\geqslant EF$，∴ EF 的长最小时，$PM+MN+PN$ 的值最小. ∵ $EF=2PA$，∴ 当 $PA\perp BC$ 时，PA 的长最小，此时由 $\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot PA$，得 $PA=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$，∴ $PM+MN+PN\geqslant\frac{24}{5}$，∴ $PM+MN+PN$ 的最小值为 $\frac{24}{5}$.

4. 【解】如图，分别作点 P 关于 AB 和 AC 的对称点 E 和 F，连接 EM，FN，EF，AE，AF，AP.



∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $\angle BAC=60°$，$AC=BC=AB=2$.

由对称性可得 $PM=EM$，$PN=NF$，$AE=AP=AF$，$\angle EAB=\angle BAP$，$\angle FAC=\angle PAC$，

∴ $PM+MN+PN=EM+MN+NF\geqslant EF$，$\angle EAB+\angle BAP+\angle FAC+\angle PAC=2(\angle BAP+\angle CAP)=2\angle BAC=120°$，

∴ 当点 E,M,N,F 共线时，$PM+MN+PN$ 最小，最小值为 EF 的长. 易知 $EF=\sqrt{3}AE=\sqrt{3}AP$，

∴ 当 AP 最小时，EF 最小.

当 $AP\perp BC$，即 $AP=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\sqrt{3}$ 时，EF 最小，

则 $PM+MN+PN$ 的最小值为 $\sqrt{3}AP=3$.

5. 【解】如图，作 M 点关于 AB 的对称点 E，作 M 点关于 AC 的对称点 F，连接 EF，交 AB 于点 P，交 AC 于点 N，连接 AE,AF,AM.

由对称性可知，$AM=AE=AF$，$\angle EAP=\angle BAM$，$\angle FAN=\angle MAC$，$EP=PM$，$MN=NF$，

∴ $\triangle PMN$ 的周长为 $PN+PM+MN=EF$.

∵ $\angle BAC=45°$，

∴ $\angle EAF=90°$，

∴ $\triangle EAF$ 是等腰直角三角形，

∴ $EF=\sqrt{2}AE=\sqrt{2}AM$，

∴ 当 AM 最小时，EF 最小，$\triangle PMN$ 的周长也最小.

当 $AM\perp BC$ 时，AM 最小.

∵ BC 边上的高的长度是 1，

∴ $AM=1$，∴ $AE=AF=1$，∴ $EF=\sqrt{2}$，

∴ $\triangle PMN$ 的周长的最小值为 $\sqrt{2}$.

6. 【解】如图，作点 P 关于直线 AB 的对称点 T，点 P 关于直线 CD 的对称点 R，连接 RT 交 AB 于 E，交 CD 于 F，连接 CR，过点 R 作 $RH\perp BC$ 交 BC 的延长线于 H. 设 $PC=x$，则 $PB=BT=4-x$.

由对称的性质可知，$PC=CR=x$.

$\angle DCR=\angle DCB=60°$，

∴ $\angle RCP=120°$，

∴ $\angle RCH=60°$，

∴ $CH=\frac{1}{2}x$，$RH=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，

∴ $TH=TB+BP+PC+CH=8-\frac{1}{2}x$，∴ $PE+EF+PF=ET+EF+FR=TR=\sqrt{TH^2+RH^2}=\sqrt{\left(8-\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}=\sqrt{x^2-8x+64}=\sqrt{(x-4)^2+48}$.

∵ 点 P 在 CM 上运动，$CM=BM=2$，

∴ $0\leqslant x\leqslant 2$，

∴ $x=2$ 时，$PE+EF+PF$ 的值最小，最小值为 $\sqrt{2^2+48}=2\sqrt{13}$.

关键点拨

点 E,F 在边 AB,CD 上运动，点 P 在线段 MC 上运动，求 $\triangle EFP$ 周长的最小值，符合“三动点”模型.

模型 29　“两定两动”模型

1. B 【解析】如图所示，作 E 关于 BC 的对称点 E'，点 A 关于 DC 的对称点 A'，连接 $A'E'$，分别交 CD,CB 于点 Q,P，此时四边形 $AEPQ$ 的周长最小. 由对称可知 $AD=A'D=3$，$BE=BE'=1$，∴ $AA'=6$，$AE'=4$. ∵ $DQ\parallel AE$，D 是 AA' 的中点，∴ DQ 是 $\triangle AA'E'$ 的中位线，∴ $DQ=\frac{1}{2}AE'=2$，∴ $CQ=DC-DQ=3-2=1$. ∵ $BP\parallel AA'$，∴ $\triangle BE'P\backsim\triangle AE'A'$，∴ $\frac{BP}{AA'}=\frac{BE'}{AE'}$，即 $\frac{BP}{6}=\frac{1}{4}$，∴ $BP=\frac{3}{2}$，∴ $CP=BC-BP=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$，

∴ $S_{四边形AEPQ}=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle ADQ}-S_{\triangle PCQ}-S_{\triangle BEP}=9-\frac{1}{2}AD\cdot DQ-\frac{1}{2}CQ\cdot CP-\frac{1}{2}BE\cdot BP=9-\frac{1}{2}\times 3\times 2-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$，故选 B.

2. $5+\sqrt{5}$ 【解析】如图所示，作点 A 关于 y 轴的对称点 A'，作点 B 关于 x 轴的对称点 B'，连接 $A'B'$，交 y 轴于点 P，交 x 轴于点 Q，

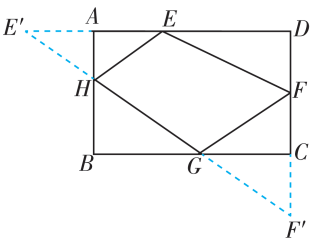
此时，四边形 $ABQP$ 的周长最小，为 $AB+AP+PQ+BQ=AB+A'P+PQ+B'Q=AB+A'B'$. ∵ $A(1,3)$，$B(2,1)$，∴ $A'(-1,3)$，$B'(2,-1)$，∴ $A'B'=$

$\sqrt{(-1-2)^2+(3+1)^2}=5$，$AB=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$，∴ $AP+PQ+QB+AB=A'B'+AB=5+\sqrt{5}$，即四边形 $ABQP$ 周长的最小值为 $5+\sqrt{5}$.

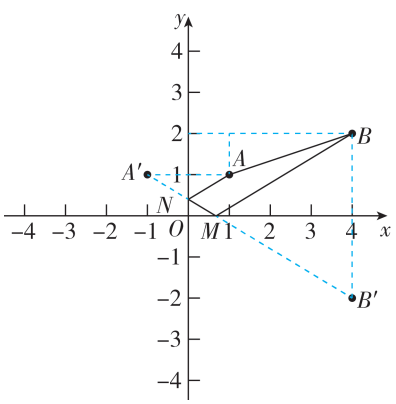
关键点拨

点 $A(1,3)$，点 $B(2,1)$ 为两定点，在 x 轴和 y 轴上分别找 Q，P 两动点，使得四边形 $ABQP$ 周长最小，符合“两定两动”模型.

3. $5+\sqrt{5}$ 【解析】如图，作 F 点关于 BC 的对称点 F'，作 E 关于 AB 的对称点 E'，连接 $E'F'$，交 BA 于 H，交 BC 于 G，此时四边形 $EFGH$ 的周长最小. 由对称可得 $FG=F'G$，$EH=E'H$，∴ $EF+FG+GH+HE=EF+F'G+GH+HE'=EF+E'F'$. ∵ $AE=1$，$ED=2$，∴ $AD=3$，$AE'=1$，∴ $DE'=4$. ∵ $DC=2$，点 F 是 DC 的中点，∴ $CF=DF=1$，∴ $CF'=1$，∴ $DF'=3$. 在 Rt△$DE'F'$ 中，$E'F'=\sqrt{DE'^2+DF'^2}=5$，在 Rt△$DEF$ 中，$EF=\sqrt{DE^2+DF^2}=\sqrt{5}$，∴ 四边形 $EFGH$ 周长的最小值为 $5+\sqrt{5}$. 故答案为 $5+\sqrt{5}$.



4. 【解】如图，作 A 关于 y 轴的对称点 A'，作 B 关于 x 轴的对称点 B'，连接 $A'B'$ 交 y 轴于 N，交 x 轴于 M，



此时 $C_{四边形ANMB}=AB+AN+MN+BM=AB+A'N+MN+B'M$，$A'N+MN+B'M=A'B'$，此时 $C_{四边形ANMB}$ 最小.

∵ $A(1,1)$，$B(4,2)$，∴ $A'(-1,1)$，$B'(4,-2)$，

∴ 易得直线 $A'B'$ 的函数解析式为 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}$，

∴ 当 $x=0$ 时，$y=\frac{2}{5}$；

当 $y=0$ 时，$x=\frac{2}{3}$，∴ $N\left(0,\frac{2}{5}\right)$，$M\left(\frac{2}{3},0\right)$，

∴ $S_{四边形ANMB}=2\times4-\left[\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times2\times\left(4-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\times3\times1+1\times1+\frac{1}{2}\times1\times\left(1-\frac{2}{5}\right)\right]=\frac{26}{15}$.

5. 【解】如图，作点 A 关于 ON 的对称点 A'，作点 B 关于 OM 的对称点 B'，连接 $A'B'$，交 OM 于点 C，交 ON 于点 D，此时四边形 $ABCD$ 的周长最小，$AB+BC+CD+AD=AB+B'C+CD+A'D=AB+A'B'$，则 $AB+A'B'$ 即为周长的最小值.

过 A' 作 ON 的平行线，过 B' 作 OM 的平行线，两平行线交于点 G.

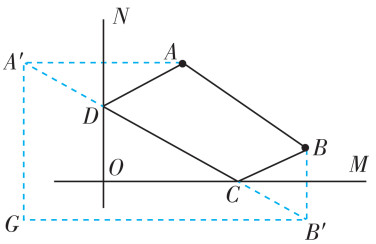
∵ A，B 到 OM 的距离分别为 40 km 和 10 km，A 到 ON 的距离为 30 km，A，B 相距 50 km，

∴ 由勾股定理易得 B 到 ON 的距离为 $40+30=70$(km)，

∴ $A'G=40+10=50$(km)，$B'G=30+70=100$(km)，

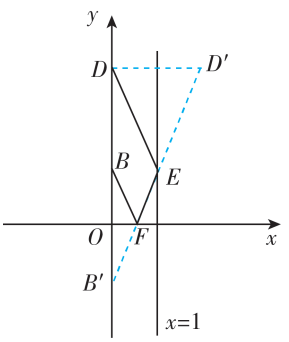
∴ $A'B'=\sqrt{A'G^2+B'G^2}=50\sqrt{5}$ km，

∴ 四边形 $ABCD$ 的周长最小为 $(50\sqrt{5}+50)$km.



6. 【解】存在.

如图，作 B 点关于 x 轴的对称点 B'，则 $B'(0,-1)$，作 D 点关于直线 $x=1$ 的对称点 D'，则 $D'(2,3)$，连接 $D'B'$ 交直线 $x=1$ 于点 E，交 x 轴于点 F，此时四边形 $DBFE$ 的周长最小.



由对称可得 $ED=ED'$，$FB=FB'$，则 $BD+BF+FE+ED=BD+B'D'=2+\sqrt{(2-0)^2+(3+1)^2}=2+2\sqrt{5}$，即周长的最小值为 $2+2\sqrt{5}$.

设直线 $D'B'$ 的解析式为 $y=kx+b$.

把 $D'(2,3)$，$B'(0,-1)$ 代入，得 $\begin{cases}2k+b=3,\\b=-1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=2,\\b=-1,\end{cases}$

∴ 直线 $D'B'$ 的解析式为 $y=2x-1$，

∴ 当 $x=1$ 时，$y=2-1=1$；

当 $y=0$ 时，$2x-1=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$，

∴ 点 E 的坐标为 $(1,1)$，点 F 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

7.【解】(1)∵ 抛物线的顶点为 $(1,4)$，

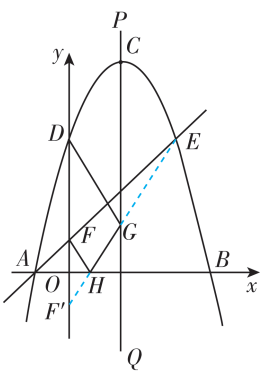
∴ 抛物线的解析式为 $y=a(x-1)^2+4$.

∵ 点 $B(3,0)$ 在抛物线上，

∴ $(3-1)^2a+4=0$，解得 $a=-1$，

∴ 抛物线的解析式为 $y=-(x-1)^2+4=-x^2+2x+3$.

(2) x 轴上存在点 H 使四边形 $DGHF$ 的周长最小.



如图，作点 F 关于 x 轴的对称点 F'，连接 EF' 交 x 轴于 H，交 PQ 于 G，此时四边形 $DGHF$ 的周长最小.

当 $x=0$ 时，$y=-x^2+2x+3=3$，∴ $D(0,3)$.

当 $y=0$ 时，$-x^2+2x+3=0$，

解得 $x_1=-1$，$x_2=3$，∴ $A(-1,0)$.

∵ 点 E 在抛物线上且横坐标为 2，

∴ $y_E=-2^2+2\times2+3=3$，∴ $E(2,3)$，

∴ 点 D，E 关于直线 PQ 对称，∴ $DG=EG$.

设直线 AE 的解析式为 $y=kx+e$，

∴ $\begin{cases}-k+e=0,\\2k+e=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\e=1,\end{cases}$

∴ 直线 AE 的解析式为 $y=x+1$，∴ $F(0,1)$，

∴ $F'(0,-1)$，$DF=3-1=2$.

∵ $C_{四边形DGHF}=DF+DG+GH+FH=DF+EG+GH+F'H=DF+EF'$，$EF'=\sqrt{2^2+(3+1)^2}=2\sqrt{5}$，

∴ $DF+EF'=2+2\sqrt{5}$，即四边形 $DGHF$ 周长的最小值为 $2+2\sqrt{5}$.

设直线 EF' 的解析式为 $y=mx-1$.

将 $E(2,3)$ 代入，得 $2m-1=3$，∴ $m=2$，

∴ 直线 EF' 的解析式为 $y=2x-1$.

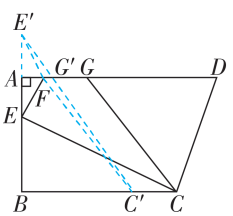
当 $y=0$ 时，$2x-1=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$，∴ $H\left(\frac{1}{2},0\right)$.

当 $x=1$ 时，$y=2x-1=2-1=1$，∴ $G(1,1)$，

∴ x 轴上存在一点 H，使四边形 $DGHF$ 的周长最小，最小值为 $2+2\sqrt{5}$，点 G 的坐标为 $(1,1)$，点 H 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

模型 30　“两定点一定长”模型

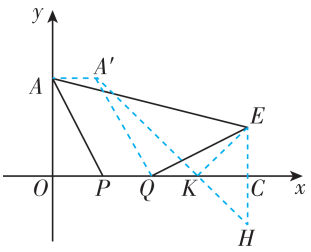
1. $\frac{15}{4}$　**【解析】**∵ $\angle A=90°$，$AD\parallel BC$，∴ $\angle B=90°$. ∵ $AB=3$，$BC=4$，$AE=1$，∴ $BE=AB-AE=3-1=2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EBC$ 中，由勾股定理，得 $EC=\sqrt{BE^2+BC^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.



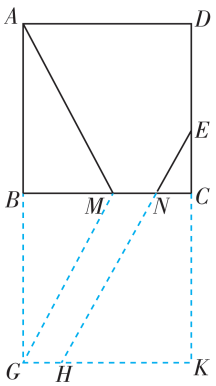
∵ $FG=1$，∴ 四边形 $CGFE$ 的周长为 $CG+FG+EF+EC=CG+EF+1+2\sqrt{5}$，∴ 四边形 $CGFE$ 的周长最小时，只要 $CG+EF$ 最小即可. 如图，过点 F 作 $FC'\parallel GC$ 交 BC 于点 C'，延长 BA 到 E'，使 $AE'=AE=1$，连接 $E'F$，$E'C'$，$E'C'$ 交 AD 于点 G'，则 AD 垂直平分 $E'E$，∴ $E'F=EF$. ∵ $AD\parallel BC$，∴ $C'F=CG$，$CC'=FG=1$，∴ $CG+EF=C'F+E'F\geqslant E'C'$，即 $CG+EF$ 的最小值为 $C'E'$ 的长. ∵ $E'B=AB+AE'=3+1=4$，$BC'=BC-CC'=4-1=3$，∴ 由勾股定理，得 $E'C'=\sqrt{E'B^2+BC'^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. ∵ $AG'\parallel BC'$，∴ $\frac{C'G'}{E'C'}=\frac{AB}{E'B}$，即 $\frac{C'G'}{5}=\frac{3}{4}$，解得 $C'G'=\frac{15}{4}$，即四边形 $CGFE$ 的周长最小时，CG 的长为 $\frac{15}{4}$. 故答案为 $\frac{15}{4}$.

2. C　**【解析】**四边形 $APQE$ 的周长为 $AP+PQ+EQ+AE$. ∵ $PQ=2$，$A(0,4)$，$E(8,2)$，∴ $AE+PQ$ 是定值，∴ $AP+QE$ 的值最小时，四边形 $APQE$ 的周长

最小. 如图,把 AP 沿 x 轴正方向平移 2 个单位长度得 $A'Q$,则 $A'(2,4)$,$A'Q=AP$. 作 E 关于 x 轴的对称点 H,则 $H(8,-2)$,连接 $A'H$ 交 x 轴于 K,连接 EK,则 $A'K+EK=A'K+KH=A'H$,∴ 当 Q 在 K 处时,$A'Q+QE$ 的值最小,即 $AP+QE$ 的值最小. 设直线 $A'H$ 的解析式为 $y=kx+b$. 将 A',H 的坐标代入,得 $\begin{cases}2k+b=4,\\8k+b=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=6,\end{cases}$ ∴ 直线 $A'H$ 的解析式为 $y=-x+6$. 令 $y=0$,则 $x=6$,则 $K(6,0)$,即 $Q(6,0)$,∴ $P(4,0)$. 故选 C.



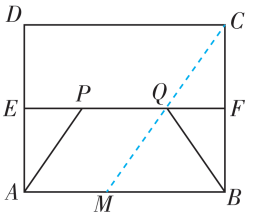
3. $\sqrt{65}$ 【解析】如图,作 A 点关于 BC 的对称点 G,连接 MG,过点 G 作 $GH/\!/MN$,过点 N 作 $NH/\!/MG$,∴ 四边形 $MGHN$ 是平行四边形,∴ $NH=MG=AM$,∴ $AM+NE=NH+NE$. 当 E,N,H 三点共线时,$AM+NE$ 有最小值. 设 GH 所在直线交 DC 的延长线于点 K,则 $\angle K=90°$,易知四边形 $BGKC$ 为正方形. ∵ $AB=5$,$CE=2$,∴ $EK=7$. ∵ $MN=1$,∴ $GH=1$,∴ $HK=4$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle HKE$ 中,$EH=\sqrt{HK^2+EK^2}=\sqrt{65}$,∴ $AM+EN$ 的最小值为 $\sqrt{65}$,故答案为 $\sqrt{65}$.



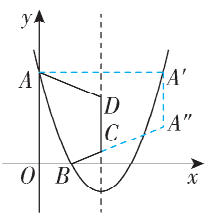
关键点拨

在正方形 $ABCD$ 中,$CE=2$,在 BC 上取两点 M,N,且 $MN=1$,点 A,点 E 为两定点,$MN=1$ 为一定长,求 $AM+EN$ 的最小值,符合“两定点一定长”模型.

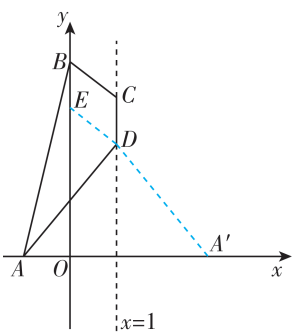
4. 12 【解析】∵ $AB=5$,$PQ=2$,∴ 四边形 $APQB$ 的周长为 $AP+PQ+BQ+AB=AP+BQ+7$. 要使四边形 $APQB$ 的周长最小,只要 $AP+BQ$ 的值最小即可. 如图,在 AB 边上截取 $AM=PQ$. ∵ 点 F 是 BC 的中点,∴ 点 B 关于 EF 的对称点为点 C,连接 CM,交 EF 于点 Q,则 CM 即为 $AP+BQ$ 的最小值. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCM$ 中,$MB=AB-AM=5-2=3$,$BC=4$,∴ $CM=\sqrt{3^2+4^2}=5$,∴ 四边形 $APQB$ 周长的最小值为 $5+7=12$. 故答案为 12.



5. $(4,1)$ 【解析】如图,作 A 点关于对称轴的对称点 A',A' 向下平移 3 个单位,得到 A'',连接 $A''B$,交对称轴于点 C,此时 $AD+BC$ 的值最小. 在 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+6$ 中,令 $x=0$,则 $y=6$,∴ 点 $A(0,6)$,令 $y=0$,则 $\frac{1}{2}x^2-4x+6=0$,解得 $x=2$ 或 $x=6$,∴ 点 $B(2,0)$. ∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-4}{2\times\frac{1}{2}}=4$,∴ $A'(8,6)$,∴ $A''(8,3)$. 设直线 $A''B$ 的解析式为 $y=kx+b$. 代入 A'',B 的坐标得 $\begin{cases}8k+b=3,\\2k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b=-1,\end{cases}$ ∴ 直线 $A''B$ 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x-1$. 当 $x=4$ 时,$y=1$,∴ $C(4,1)$. 故答案为 $(4,1)$.



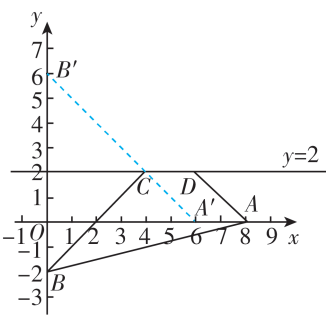
6. 【解】如图,在 y 轴上取点 E,使 $BE=CD=1$,连接 ED,则四边形 $BCDE$ 为平行四边形,则 $BC=DE$.



∵ $B(0,4)$,$A(-1,0)$,∴ $OB=4$,$OA=1$,∴ $OE=3$,$AB=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$. 作点 A 关于直线 $x=1$ 的对称点 A',连接 DA',∴ $A'(3,0)$,$AD=A'D$,∴ $AD+DE=A'D+DE$. 当 A',E,D 三点共线时,$A'D+DE$ 的值最小,最小值为 $A'E$ 的长,即 $AD+BC$ 的最小值为 $A'E$ 的长.

在 Rt△$A'OE$ 中，由勾股定理得 $A'E=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，∴ 四边形 $ABCD$ 周长的最小值为 $AB+CD+BC+AD=AB+CD+A'E=\sqrt{17}+1+3\sqrt{2}$.

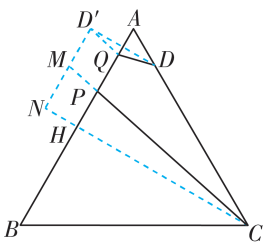
7.【解】如图所示，∵ $A(8,0)$，$B(0,-2)$，∴ AB 的长是一个定值. ∵ AB 的长是定值，$CD=2$，四边形 $ABCD$ 的周长为 $AB+BC+CD+DA$，∴ 当 $BC+AD$ 的值最小时，四边形 $ABCD$ 的周长最小. 作点 B 关于直线 $y=2$ 的对称点 B'，则 $B'(0,6)$，过点 C 作 $CA'\parallel AD$ 交 x 轴于点 A'. ∵ $DC\parallel AA'$，$CA'\parallel AD$，∴ 四边形 $AA'CD$ 是平行四边形，∴ $AD=CA'$，$AA'=CD=2$，∴ 点 A' 的坐标为 $(6,0)$. 当 B'，C，A' 在同一直线上时，$BC+AD=B'C+A'C=B'A'$，即 $BC+AD$ 的最小值为 $A'B'$ 的长. 设直线 $B'A'$ 的解析式为 $y=kx+b$. 把点 $B'(0,6)$，$A'(6,0)$ 代入 $y=kx+b$，∴ $\begin{cases}6=b,\\0=6k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=6,\end{cases}$ ∴ 直线 $B'A'$ 的解析式为 $y=-x+6$. 把 $y=2$ 代入 $y=-x+6$，得 $x=4$，∴ 点 C 的坐标为 $(4,2)$. ∵ $CD=2$，点 C 在点 D 的左边，∴ 点 D 的坐标是 $(6,2)$.



8.【解】根据题意可知，$AC+CD+DB=(ED+DB)+CD=EB+CD$.

又因为 CD 的长度是平行线 PQ 与 MN 之间的距离，所以此时 $AC+CD+DB$ 最短.

9.【解】如图所示，作点 D 关于 AB 的对称点 D'，连接 $D'Q$，以 $D'Q$，PQ 为边作平行四边形 $PQD'M$，则 $DQ=D'Q=MP$，$DD'=2\times AD\times\sin 60°=\sqrt{3}$，$D'M=PQ=1$.



过 C 作 $CH\perp AB$ 于 H，交 $D'M$ 的延长线于 N，

则 $\angle N=90°$，$CH=BC\times\sin 60°=3\sqrt{3}$，

易得 $NH=\frac{1}{2}DD'=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴ $MN=AH-D'M-AD\times\cos 60°=AC\times\cos 60°-1-\frac{1}{2}=3-1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

$CN=NH+CH=\frac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{3}=\frac{7}{2}\sqrt{3}$.

当 M，P，C 在同一直线上时，$MP+CP$ 有最小值且等于 CM 的长，即 $DQ+CP$ 的最小值等于 CM 的长.

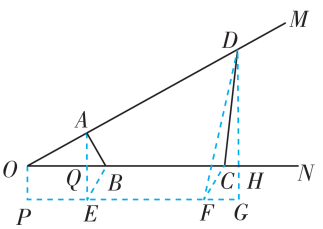
在 Rt△MNC 中，

$CM=\sqrt{MN^2+CN^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{39}$.

又∵ $PQ=1$，$CD=6-1=5$，

∴ 四边形 $PCDQ$ 周长的最小值为 $\sqrt{39}+6$.

10.【解】如图所示，作点 A 关于直线 ON 的对称点 E，过点 E 作 $EF\parallel BC$，$EF=BC$，连接 BE，CF，过点 O 作 $OP\perp$ 直线 EF 于 P，过点 D 作 $DG\perp$ 直线 EF 于 G，交射线 ON 于 H，设 AE 交射线 ON 于 Q，连接 DF，



∴ $AQ=QE$，$AQ\perp ON$，$AB=BE$. ∵ $\angle MON=30°$，∴ $AQ=QE=\frac{1}{2}OA=1$. ∵ $DG\perp EF$，$EF\parallel ON$，∴ $DG\perp ON$，∴ $DH=\frac{1}{2}OD=4$，∴ $OQ=\sqrt{OA^2-AQ^2}=\sqrt{3}$，$OH=\sqrt{OD^2-DH^2}=4\sqrt{3}$. ∵ $OP\perp PG$，$HG\perp PG$，$HG\perp OH$，∴ 四边形 $OPGH$ 是矩形，∴ $PG=OH=4\sqrt{3}$. 同理可证四边形 $OPEQ$ 是矩形，∴ $PE=OQ=\sqrt{3}$，$OP=QE=AQ=HG=1$，∴ $DG=DH+GH=5$，$FG=PG-PE-EF=PG-PE-BC=\sqrt{3}$，∴ $DF=\sqrt{DG^2+FG^2}=2\sqrt{7}$. ∵ $OD=8$，$OA=2$，∴ $AD=6$. ∵ $EF=BC$，$EF\parallel BC$，∴ 四边形 $BEFC$ 是平行四边形，∴ $AB=BE=CF$，∴ 四边形 $ABCD$ 的周长为 $AB+BC+CD+AD=6+2\sqrt{3}+AB+CD=6+2\sqrt{3}+CF+CD$，∴ 当 C，D，F 三点共线时，$CF+CD$ 的值最小，即四边形 $ABCD$ 的周长最小，最小为 $6+2\sqrt{3}+DF$，∴ 四边形 $ABCD$ 的周长的最小值为 $6+2\sqrt{3}+2\sqrt{7}$.